Przedstawienie dowolnej funkcji logicznej za pomocą funktorów NAND i NOR.

1. Wstęp

Przy realizacji układów logicznych może czasem zajść potrzeba przedstawienia funkcji logicznej, a więc tego jak działa układ, za pomocą jedynie funktorów NAND lub funktorów NOR, które tworzą system funkcjonalnie pełny tzn. taki, którym może przedstawić dowolne wyrażenie. Podstawowym i minimalnym układem funkcjonalnie pełnym jest zestaw funktorów AND (koniunkcja – mnożenie), OR (alternatywa – suma) i NOT (zaprzeczenie – negacja). Aby więc udowodnić, iż za pomocą jedynie NAND lub jedynie NOR możemy wykonać i przedstawić dowolną funkcję wystarczy pokazać, że za ich pomocą można przedstawić te trzy wyżej wymienione funkcje podstawowe: mnożenie, sumę i negację.

Potrzeba ta, może wynikać z minimalizacji ilości elementów dyskretnych (w tym przypadku układów scalonych za pomocą, których buduje się bramki logiczne), lub też wykorzystania jednakowych układów w celu powtarzalności procesu produkcji jak i mniejszego zróżnicowania użytych elementów. Układy scalone dostępne ogólnie w sprzedaży zawierają w sobie jeden rodzaj bramek, może to być na przykład cztery dwuwejściowe NAND w układzie 7400, cztery NOR w 7402, cztery AND w 7408 czy też cztery OR w 7432 itd. W takim razie, aby móc przedstawić funkcje, w której argumenty się mnoży, dodaje i neguje trzeba zastosować co najmniej 3 różne układy scalone mogące realizować dane działania. Może się jednak okazać, iż korzystając z zapisu za pomocą samych NAND i NOR wystarczy użyć jedynie jeden czy dwa układy i to na dodatek tego samego rodzaju. Umożliwi to łatwiejszy montaż, brak możliwości pomylenia i zastosowania złego układu itp. Poza tym, funkcja NAND jest podstawową funkcją w technice TTL i jest reprezentowana przez pojedynczy tranzystor, a więc i ich produkcja jest łatwiejsza i tańsza.

2. Przedstawienie funkcji podstawowych za pomocą NAND i NOR

Załóżmy, że mamy dwie funkcje wejściowe, argumenty, '*a*' i '*b*' oraz funkcję wyjściową '*y*'.
Podstawowe funkcje:

AND: $y = a \wedge b = a \cdot b$

OR : $y = a \vee b = a + b$

NOT: $y = \overline{a}$ - odwraca znak

Za ich pomocą można przedstawić dowolną funkcję.

NAND: $y = \overline{a \wedge b} = \overline{a \cdot b}$ - jest to negacja iloczynu zmiennych wejściowych

NOR: $y = \overline{a \vee b} = \overline{a + b}$ - negacja sumy zmiennych wejściowych.

Aby móc przedstawić funkcje podstawowe, należy znać:

A) Aksjomaty algebry Boole'a:

$a + a = a$

$a \cdot a = a$

$\overline{\overline{a}} = a$

B) Prawa de Morgana:

$y = \overline{a \cdot b} = \overline{a} + \overline{b}$ - zanegowany iloczyn argumentów jest równy sumie zanegowanych argumentów.

$y = \overline{a + b} = \overline{a} \cdot \overline{b}$ - zanegowana suma argumentów jest równa iloczynowi zanegowanych argumentów.

Prawo to można łatwo rozszerzyć na większą ilość argumentów:

$y = \overline{a \cdot b \cdot c \cdot d} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c} + \overline{d}$

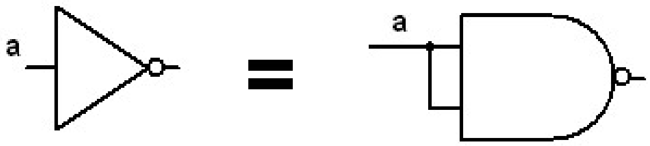
$y = \overline{a + b + c + d} = \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} \cdot \overline{d}$

NOT:

Chcąc przedstawić za pomocą NAND dowolną funkcję należy tak przekształcić równanie, aby nie zmienić jego wartości, a przedstawić za pomocą zanegowanego iloczynu zmiennych.

$y = \bar{a}$, korzystając z aksjomatu $a \cdot a = a$, otrzymuje się:

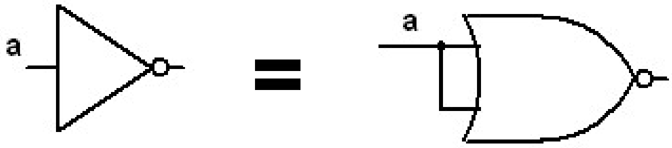
$y = \bar{a} = \overline{a \cdot a}$ - a więc NAND, na którego oba wejścia należy podać ten sam sygnał ‘a’.



Chcąc przedstawić za pomocą NOR dowolną funkcję należy tak przekształcić równanie, aby nie zmienić jego wartości, a przedstawić za pomocą zanegowanej sumy zmiennych.

$y = \bar{a}$, korzystając z aksjomatu $a + a = a$, otrzymuje się:

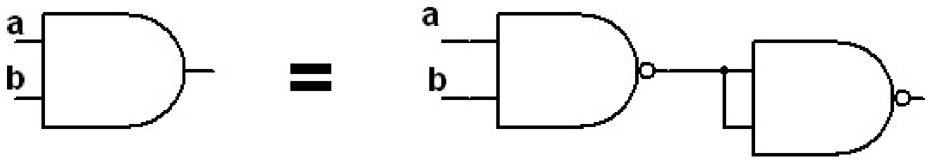
$y = \bar{a} = \overline{a + a}$ - a więc NOR , na którego oba wejścia należy podać ‘a’.



AND:

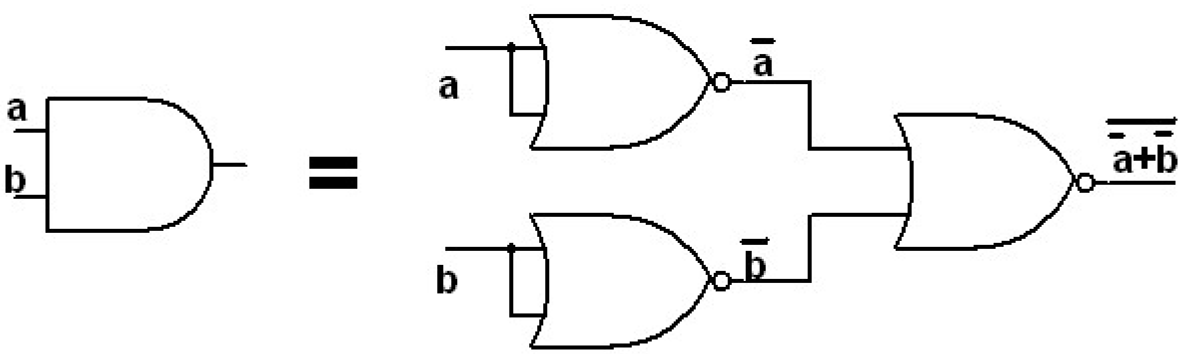
$y = a \cdot b$ - aby był to NAND brakuje tylko negacji. Dostawiając pojedynczą negację zmieni się wartość funkcji na przeciwną, dlatego należy zanegować podwójnie. Nie zmienia to wartości funkcji, a otrzyma się zanegowany iloczyn zmiennych ‘a’ i ‘b’ plus dodatkowa negacja, którą można zrealizować jako drugi NAND ze zwartymi wejściami:

$y = a \cdot b = \bar{\bar{y}} = \overline{\overline{a \cdot b}} = \overline{\left(\overline{a \cdot b}\right)}$



$y = a \cdot b$ - aby móc przedstawić to za pomocą NOR, czyli zanegowanej sumy to na pewno należy zamienić znak mnożenia na sumę. Można to uzyskać dzięki prawu de Morgana $y = \overline{a \cdot b} = \bar{a} + \bar{b}$. Aby móc z niego skorzystać należy zanegować iloczyn, ale żeby nie zmienić wartości funkcji neguje się podwójnie uzyskując:

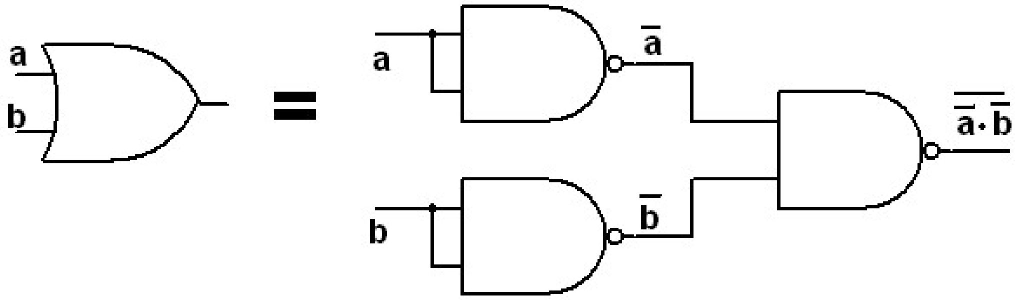
$y = a \cdot b = \overline{\overline{a \cdot b}} = \overline{\left(\overline{a \cdot b}\right)} = \overline{\bar{a} + \bar{b}}$ - otrzymuje się więc zanegowaną sumę zanegowanych argumentów. Zanegowane argumenty to dwa NOR-y ze zwartymi wejściami, na pierwszy podajemy ‘a’, na drugi ‘b’, a zanegowana ich suma to trzeci NOR.



OR:

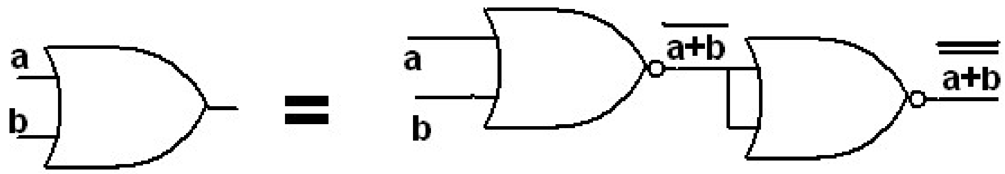
$y = a + b$ - aby móc to przedstawić za pomocą NAND, czyli zanegowanego iloczynu zmiennych, sumę należy zmienić znak sumy na iloczyn korzystając z prawa de Morgana, a więc aby nie zmienić wartości funkcji należy zanegować podwójnie funkcję:

$y = a + b = \overline{\overline{a+b}} = \overline{\left(\overline{a+b}\right)} = \overline{\bar{a}\cdot\bar{b}}$ - otrzymuje się zanegowany iloczyn zanegowanych argumentów, a więc trzy NAND-y, 2 negujące ‘a’ i ‘b’ oraz zanegowany ich iloczyn.



$y = a + b$ - aby móc przedstawić za pomocą NOR brakuje negacji, żeby więc nie zmienić wartości neguje się podwójnie otrzymując dwa NOR-y jeden jako zanegowaną sumę argumentów a drugi jako negację tego wyrażenia:

$y = a + b = \overline{\overline{y}} = \overline{\overline{a+b}} = \overline{\left(\overline{a+b}\right)}$



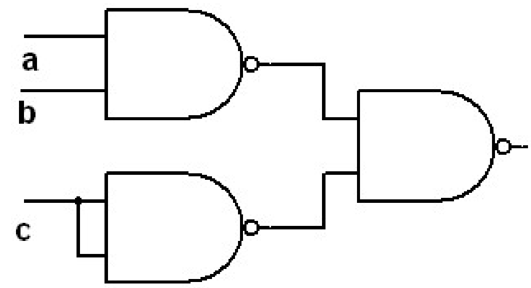
Jak widać, można wszystkie podstawowe funkcje przedstawić za pomocą NAND lub NOR, a więc dowolna funkcję, która składa się z tych działań mogę przedstawić za pomocą samych NAND lub NOR.

3. Przykłady

Przedstaw za pomocą NAND i NOR:

1) $y = a \cdot b + c$ - aby móc to przedstawić za pomocą NAND należy wszystkie działania sprowadzić do zanegowanego iloczynu zmiennych. Na pewno, więc należy zamienić sumę na iloczyn – korzystając z Prawa de Morgana i podwójnej negacji:

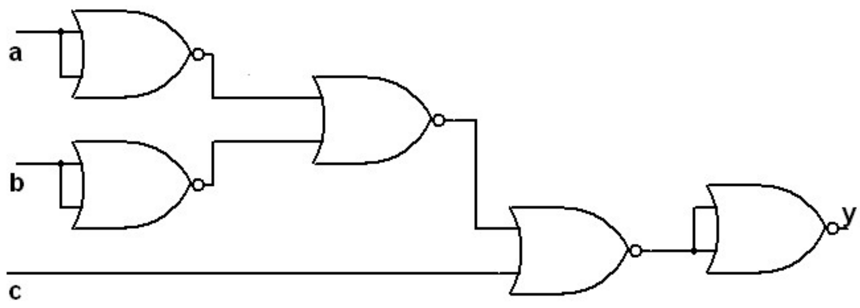
$y = a \cdot b + c = \overline{\overline{a \cdot b + c}} = \overline{\overline{(a \cdot b)} + c} = \overline{\overline{a \cdot b} \cdot \bar{c}}$ -



otrzymujemy trzy NAND-y – zanegowany iloczyn ‘a’ i ‘b’, zanegowane ‘c’, oraz zanegowany iloczyn ‘$a \cdot b$’ i ‘c’ . Skoro tak, to zamiast dwóch układów scalonych, jeden do OR (+) a drugi do AND (*) można użyć jednego z 4 NAND-ami. Oszczędza się więc miejsce, czas montażu i wykonania.

Za pomocą NOR należy zamienić iloczyn na sumę korzystając z Prawa de Morgana, a także korzystając z podwójnej negacji zanegować sumę:

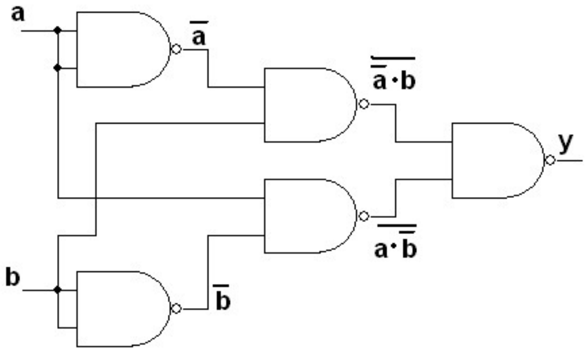
$y = a \cdot b + c = \overline{\overline{a \cdot b}} + c = \overline{\bar{a} + \bar{b}} + c = \overline{\overline{\overline{\bar{a} + \bar{b}} + c}}$ - otrzymuje się więc, aż 5 NOR-ów. Negację ‘a’, negację ‘b’, negację ich sumy, negację sumy ‘$\overline{\bar{a} + \bar{b}}$’ i ‘c’ oraz negację całego wyrażenia.



2) XOR : $y=\bar{a}\cdot b+a\cdot\bar{b}$

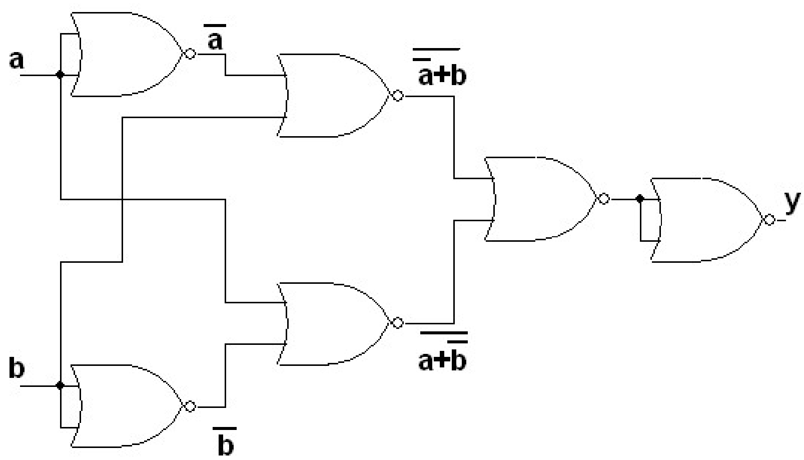
Aby przedstawić to za pomocą samych NAND-ów należy na pewno pozbyć się znaku sumy zamieniając go za pomocą prawa de Morgana na iloczyn:

$y=\bar{a}\cdot b+a\cdot\bar{b}=\overline{\overline{\bar{a}\cdot b+a\cdot\bar{b}}}=\overline{\overline{\bar{a}\cdot b}\cdot\overline{a\cdot\bar{b}}}$ - w ten sposób otrzymuje się same zanegowane iloczyny bądź negacje. Aby to przedstawić potrzeba więc 5 NAND-ów. Dwa z nich służą do zanegowania ‘a’ i ‘b’ , trzeci $\overline{\bar{a}\cdot b}$, czwarty $\overline{a\cdot\bar{b}}$, i ostatni który jest zanegowanym iloczyn dwóch wcześniejszych wartości. Aby zrealizować to z pomocą funkcji podstawowych należałoby użyć 2xAND, OR i 2xNOT – trzech różnych funkcji – 3 układów scalonych. Po zamianie mamy jedynie 5 NAND-ów, a więc tylko dwa takie same układy scalone, które mają w sobie cztery NAND-y każdy.



Za pomocą NOR – trzeba zamienić znaki mnożenia na sumy za pomocą praw de Morgana, ale także, jako iż mamy zwykłą sumę, czyli OR, zanegować ją by uzyskać NOR, a skoro tak to oczywiście korzystamy z prawa podwójnej negacji by nie zmienić wartości funkcji:

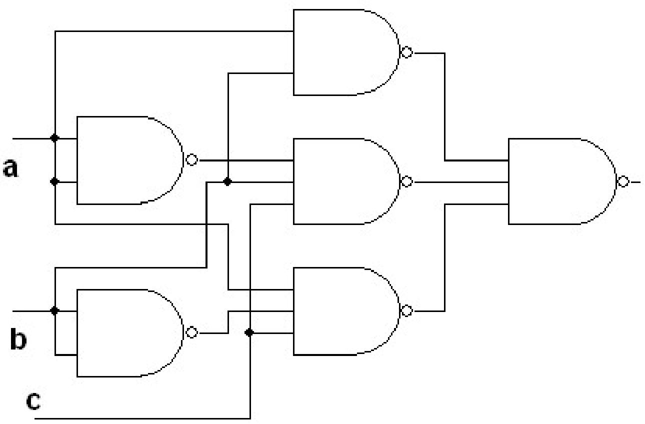
$y=\bar{a}\cdot b+a\cdot\bar{b}=\overline{\overline{\bar{a}\cdot b}}+\overline{\overline{a\cdot\bar{b}}}=\overline{\bar{\bar{a}}+\bar{b}}+\overline{\bar{a}+\bar{\bar{b}}}=\overline{a+\bar{b}}+\overline{\bar{a}+b}=\overline{\overline{\overline{a+\bar{b}}+\overline{\bar{a}+b}}}$ - otrzymujemy 6 NOR-ów. Dwa służą do negacji sygnału ‘a’ i ‘b’, trzeci $\overline{a+\bar{b}}$, czwarty $\overline{\bar{a}+b}$, piąty $\overline{\overline{a+\bar{b}}+\overline{\bar{a}+b}}$ i szósty będący negacją wszystkiego. Czyli znowu zamiast 3 różnych układów scalonych można użyć jedynie dwóch i to takich samych, zawierających po cztery NOR-y.



3) Przykłady te możemy rozszerzyć na bardziej skomplikowane zapisy: $y=\bar{a}\cdot b\cdot c+a\cdot\bar{b}\cdot c+a\cdot b$

Za pomocą NAND: należy na pewno zamienić znaki sum na mnożenie – a więc prawo de Morgana:

$y = \overline{\overline{\overline{a}\cdot b\cdot c + a\cdot\overline{b}\cdot c + a\cdot b}} = \overline{\overline{\overline{a}\cdot b\cdot c}\cdot\overline{a\cdot\overline{b}\cdot c}\cdot\overline{a\cdot b}}$ - otrzymujemy już same NAND: dwa 2-wejściowe do negacji ‘a’ i ‘b’, jeden dwuwejściowy do zanegowanego iloczynu ‘a’ i ‘b’ - $\overline{a\cdot b}$, i trzy 3-wejściowe do realizacji: $\overline{\overline{a}\cdot b\cdot c}$, $\overline{a\cdot\overline{b}\cdot c}$ oraz negacji iloczynu wszystkich składników: $\overline{\overline{\overline{a}\cdot b\cdot c}\cdot\overline{a\cdot\overline{b}\cdot c}\cdot\overline{a\cdot b}}$

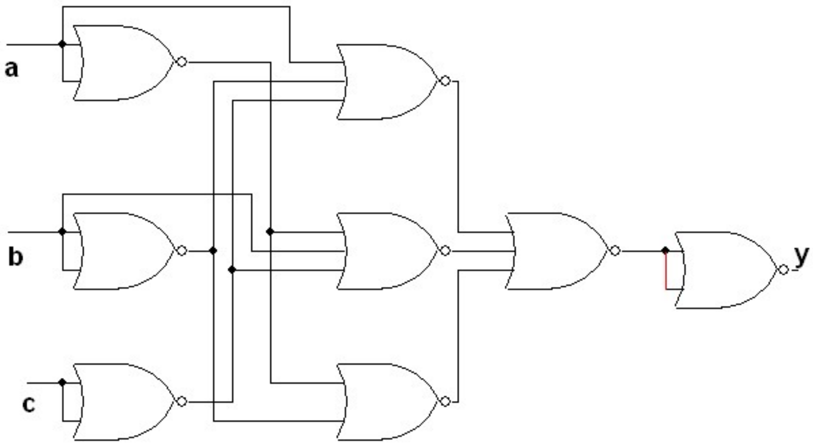


Za pomocą NOR należy zamienić najpierw znaki mnożenia na sumy, a potem zamienić za pomocą podwójnej negacji zwykły OR na NOR:

$y = \overline{a}\cdot b\cdot c + a\cdot\overline{b}\cdot c + a\cdot b = \overline{\overline{\overline{a}\cdot b\cdot c}} + \overline{\overline{a\cdot\overline{b}\cdot c}} + \overline{\overline{a\cdot b}} = \overline{a+\overline{b}+\overline{c}} + \overline{\overline{a}+b+\overline{c}} + \overline{\overline{a}+\overline{b}} =$

$= \overline{\overline{\overline{a+\overline{b}+\overline{c}} + \overline{\overline{a}+b+\overline{c}} + \overline{\overline{a}+\overline{b}}}}$

Otrzymujemy 8 NOR-ów, w tym pięć 2-wejściowych (do negacji ‘a’, ‘b’, ‘c’, i całego wyrażenia na końcu, oraz do $\overline{\overline{a}+\overline{b}}$), i trzy 3-wejściowe $\overline{a+\overline{b}+\overline{c}}$, $\overline{\overline{a}+b+\overline{c}}$, $\overline{\overline{a+\overline{b}+\overline{c}} + \overline{\overline{a}+b+\overline{c}} + \overline{\overline{a}+\overline{b}}}$



4) Podobnie można postąpić z wyrażeniem zapisanym w postaci normalnej postaci koniunkcji:

$y = (\overline{a}+b+c)\cdot(a+\overline{b}+c)\cdot(a+b)$

Za pomocą samych NAND: Należy zamienić najpierw znaki sum na mnożenie za pomocą praw de Morgana, a potem zamienić zwykłe mnożenie (AND) na zanegowane (NAND) za pomocą podwójnej negacji. $y = \overline{\overline{(\overline{a}+b+c)}}\cdot\overline{\overline{(a+\overline{b}+c)}}\cdot\overline{\overline{(a+b)}} = \overline{a\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}}\cdot\overline{\overline{a}\cdot b\cdot\overline{c}}\cdot\overline{\overline{a}\cdot\overline{b}} = \overline{\overline{\overline{a\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}}\cdot\overline{\overline{a}\cdot b\cdot\overline{c}}\cdot\overline{\overline{a}\cdot\overline{b}}}}$

Otrzymuje się w sumie 8 NAND-ów, pięć 2-wejściowych do negacji ‘a’, ‘b’, ‘c’ i całego wyrażenia oraz do iloczynu negacji ‘a’ i ‘b’, oraz trzy 3-wejściowe do $\overline{a\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}}$, $\overline{\overline{a}\cdot b\cdot\overline{c}}$, $\overline{\left(\overline{a\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}}\right)\cdot\left(\overline{\overline{a}\cdot b\cdot\overline{c}}\right)\cdot\left(\overline{\overline{a}\cdot\overline{b}}\right)}$

Za pomocą NOR: Należy zamienić znaki mnożeń na sumy za pomocą praw de Morgana:

$y = (\overline{a}+b+c)\cdot(a+\overline{b}+c)\cdot(a+b) = \overline{\overline{(\overline{a}+b+c)\cdot(a+\overline{b}+c)\cdot(a+b)}} = \overline{\overline{(\overline{a}+b+c)}+\overline{(a+\overline{b}+c)}+\overline{(a+b)}}$

Otrzymujemy 6 NOR-ów, trzy 2-wejściowe (negacja ‘a’, ‘b’ i zanegowana suma ‘a’ i ‘b’) oraz trzy 3-wejściowe $\overline{(\overline{a}+b+c)}$, $\overline{(a+\overline{b}+c)}$, $\overline{\overline{(\overline{a}+b+c)}+\overline{(a+\overline{b}+c)}+\overline{(a+b)}}$