UNIWERSYTET ŚLĄSKI

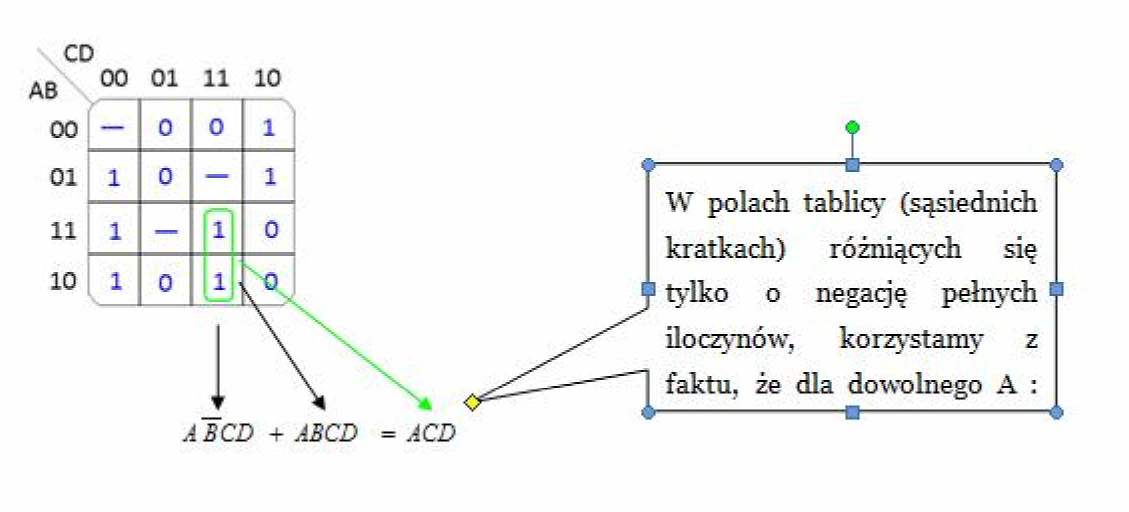
Technika TTL,siatki Karnaugh'a, zasada minimalizacji funkcji

Zawartość

1 Część teoretyczna:

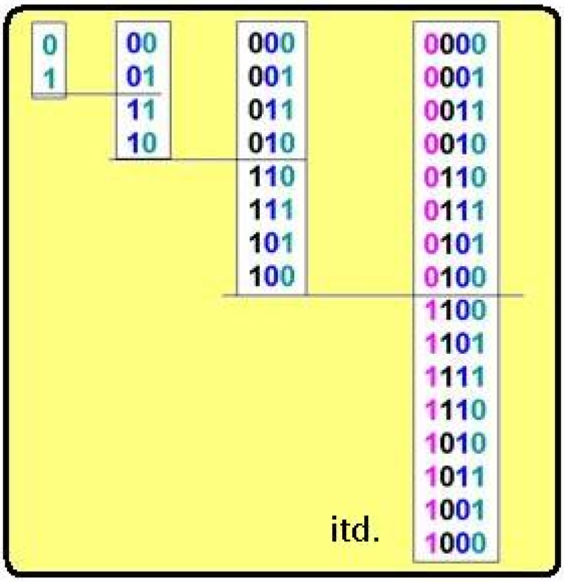
1.1 Co to są siatki Karnaugh'a

Tablica Karnaugh'a jest to prostokąt (kwadrat) złożony z 2^n kratek, każda z nich reprezentuje jeden pełny iloczyn zmiennych binarnych. Można więc powiedzieć, że ciąg wartości tych zmiennych tworzy adres kratki. Kratki są ponumerowane w taki sposób, że numer i jest liczbą dziesiętną odpowiadającą kombinacji zmiennych traktowanej jako liczba dwójkowa. W kratki wpisuje się wartość funkcji dla odpowiadających wartości zmiennych.



Rysunek 1. Przykładowa siatka

Aby uzyskać efekt „sąsiedztwa” współrzędne kratek opisuje się za pomocą kodu Gray’a.

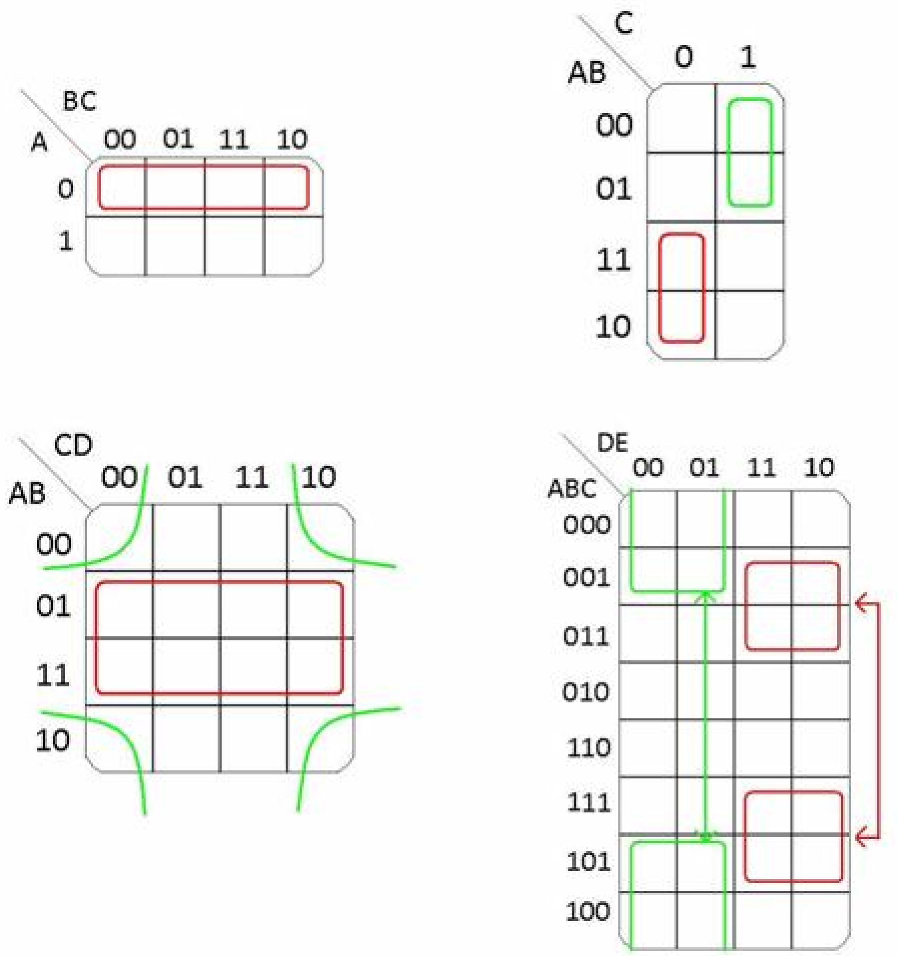


Rysunek 2. Kod Gray’a

1.2 Zasada minimalizacji funkcji:

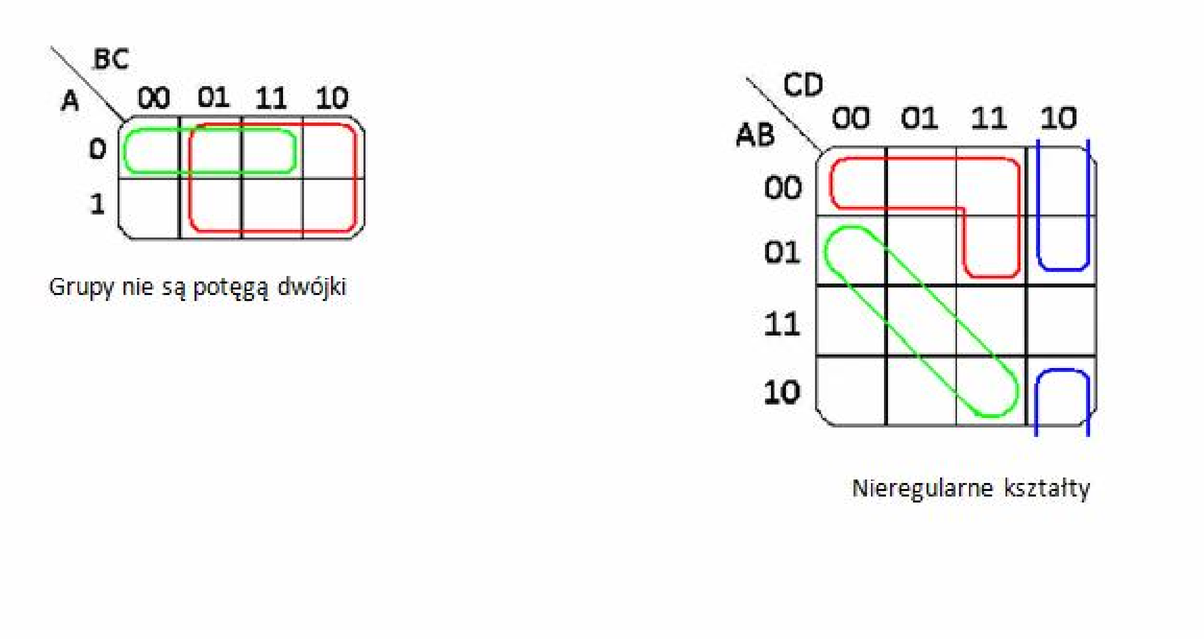
Minimalizacja funkcji w siatkach Karnaugh'a polega na zakreślaniu grup jedynek i zer, w wyniku czego otrzymujemy funkcję logiczną w postaci sumy iloczynów (dla jedynek) lub iloczynu sumy (dla zer). Ilość elementów, które zaznaczamy w grupy musi być równa 2^n, gdzie $n \in N$ (czyli 1, 2, 4, 8 itd.), a zakreślona grupa musi być symetryczna względem którejś z głównych (bądź podgłównych) osi siatki. Należy pamiętać, że grupy mogą na siebie nachodzić, oraz występuje możliwość zakreślenia grup, które „stykają" się krawędziami. Można wyobrazić sobie to w taki sposób, jakbyśmy siatkę wycięli z papieru i skleili brzegami. Wtedy na powstałej bryle moglibyśmy zakreślić wszystkie grupy dokładnie.

Przykłady tworzenia grup :



Rysunek 3. Przykłady poprawnego grupowania

Przykłady nieprawidłowego grupowania:



Rysunek 4. Przykłady niepoprawnego grupowania

1.3 Ogólne zasady tworzenia grup

Zakreślone grupy powinny być największe z możliwych, ponieważ zakreślanie grup małych (np. jednoelementowych) nie minimalizuje funkcji, co za tym idzie musimy posłużyć się algebrą Boole'a, a to pracochłonne.

1.4 Co to są stany nieustalone

W niektórych sytuacjach okazać może się, że dany stan jest nam obojętny, tj. nieważne, czy będzie on jedynką czy zerem. Oznaczamy go symbolem — lub **Ø**. W takim wypadku dany stan możemy zakwalifikować do grupy jedynek lub zer, co daje nam dodatkową możliwość powiększenia grup, a co za tym idzie uproszczenia funkcji końcowej.

1.5 Grupowanie wg "1" i "0"

Odczytanie funkcji wyjściowej nie jest teraz niczym trudnym - patrzymy na współrzędne zakreślonej grupy i do wyrażenia iloczynowego (każda zakreślona grupa jedynkowa jest jednym iloczynem w postaci kanonicznej) wchodzą tylko te zmienne, które w obrębie grupy nie zmieniają swojej wartości z 0 na 1 (lub z 1 na 0). Grupy w jedynkach zapisujemy jako sumę iloczynów *np.* $f_{(1)} = (A * C * E) + (D * B)$, zaś gdy grupujemy zera, funkcja przyjmuje postać iloczynu sum *np.* $f_{(0)} = (A + B + C) * (A + D)$

1.6 Prawo de Morgana

Istnieją dwa twierdzenia, dzięki którym mamy możliwość uproszczenia funkcji wyjściowej oraz definiowania jednych spójników zdaniowych za pomocą innych,

1. I Prawo de Morgana - negacja koniunkcji jest równoważna alternatywie negacji:
$$\overline{(p \wedge q)} = \overline{p} \vee \overline{q}$$

2. II Prawo de Morgana - negacja alternatywy jest równoważna koniunkcji negacji:
$$\overline{(p \vee q)} = \overline{p} \wedge \overline{q}$$

1.7 Podwójna negacja

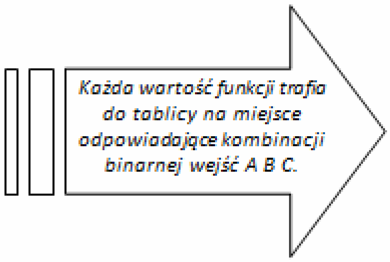
Jeśli w funkcji wyjściowej otrzymamy podwójną negację (lub jej parzystą wielokrotność) możemy ją opuścić bez żadnych zmian.

$$\overline{\overline{p}} = p$$

2 Przykłady

2.1 Wpisywanie funkcji do tablicy.

	A	B	C	F
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	-
6	1	1	0	0
7	1	1	1	0



AB \ C	0	1
00	0	1
01	1	1
11	0	0
10	0	-

Rysunek 5. Wpisywanie funkcji do tablicy

Dodatkowym ułatwieniem, które można zastosować do wypełniania tablicy Karnaugh'a jest numeracja kratek (wartości wpisane w tablicy oznaczają liczbę porządkową z tabeli prawdy, przykład widoczny poniżej).

A \ BC	00	01	11	10
0	0	1	3	2
1	4	5	7	6

AB \ C	0	1
00	0	1
01	2	3
11	6	7
10	4	5

Rysunek 6. Zapis tabeli kodem Gray'a

Mając już minimalną wiedzę na ten temat rozszerzmy tablicę tak, aby zmieścić w niej 16 wartości:

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

Rysunek 7.Tabela układu z czterema wejściami

Teraz pora na najbardziej rozbudowany przykład – siatkę zawierającą 32 wartości.

ABC \ DE	00	01	11	10
000	0	1	3	2
001	4	5	7	6
011	12	13	15	14
010	8	9	11	10
110	24	25	27	26
111	28	29	31	30
101	20	21	23	22
100	16	17	19	18

Rysunek 8. Tabela układu z czterema wejściami

2.2 ZADANIE 1.

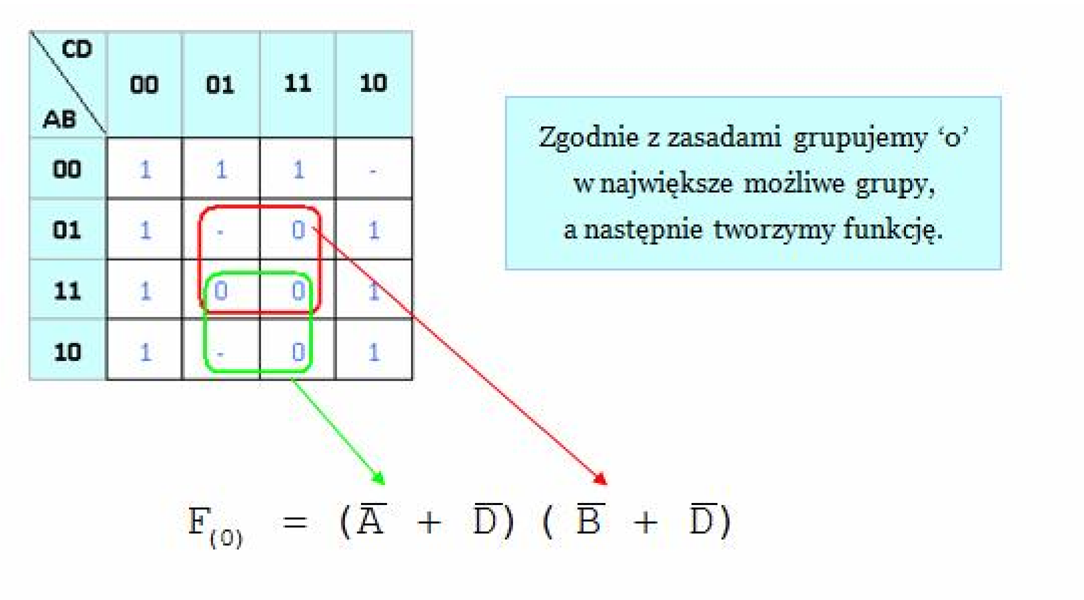
2.2.1 Zadanie a)

Z poniższej siatki Karnaugh'a odczytać funkcję dla **0** i **1**.

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	1	-
01	1	-	0	1
11	1	0	0	1
10	1	-	0	1

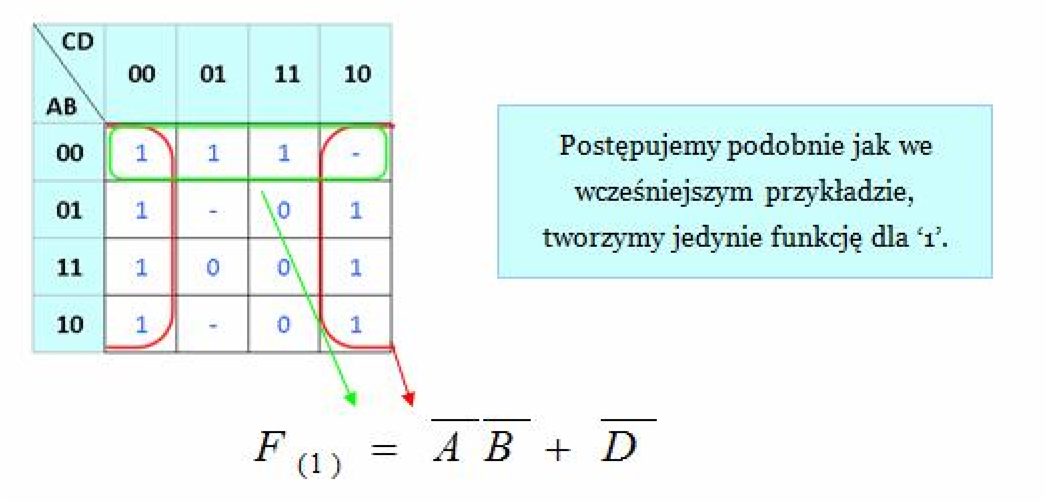
Rysunek 9. Siatka do zadania 1

Rozwiązanie dla zer :



Rysunek 10. Siatka Karnaugh'a i wzór funkcji wersja 1

Rozwiązanie dla jedynek:



Rysunek 11. Siatka Karnaugh’a i wzór funkcji wersja 2

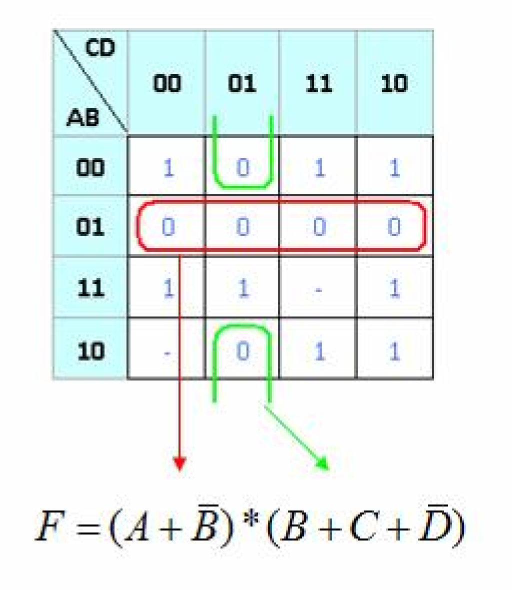
2.2.2 Zadanie b)

Mamy następującą siatkę:

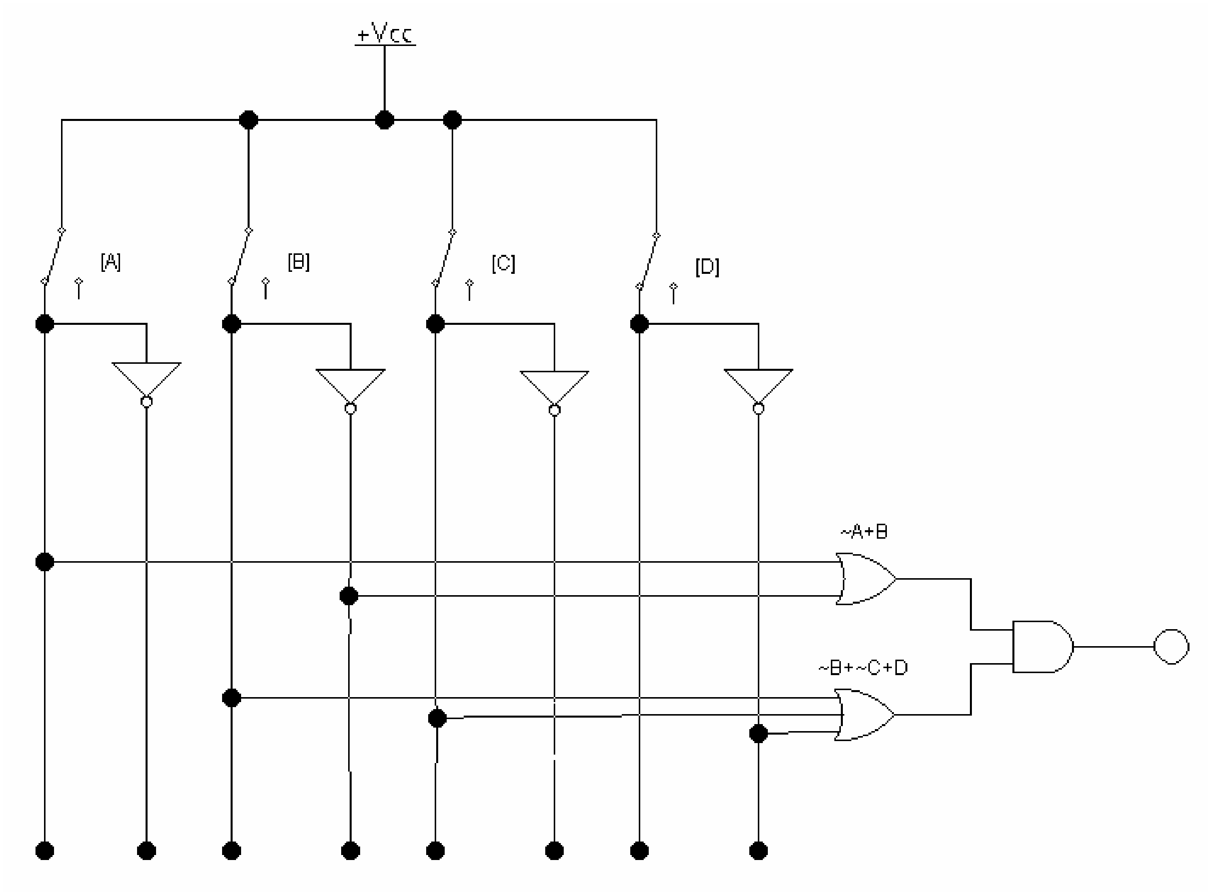
AB \ CD	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	0	0	0	0
11	1	1	-	1
10	-	0	1	1

Rysunek 12. Siatka do zadania 1

Rozwiązanie dla zer :

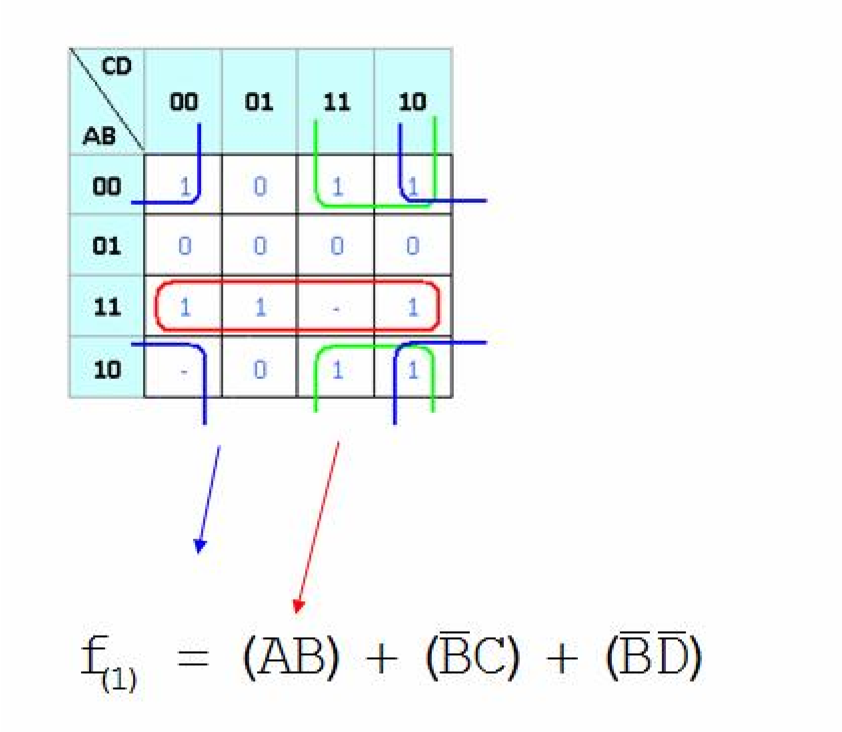


Rysunek 13. Siatka Karnaugh'a i wzór funkcji wersja 1

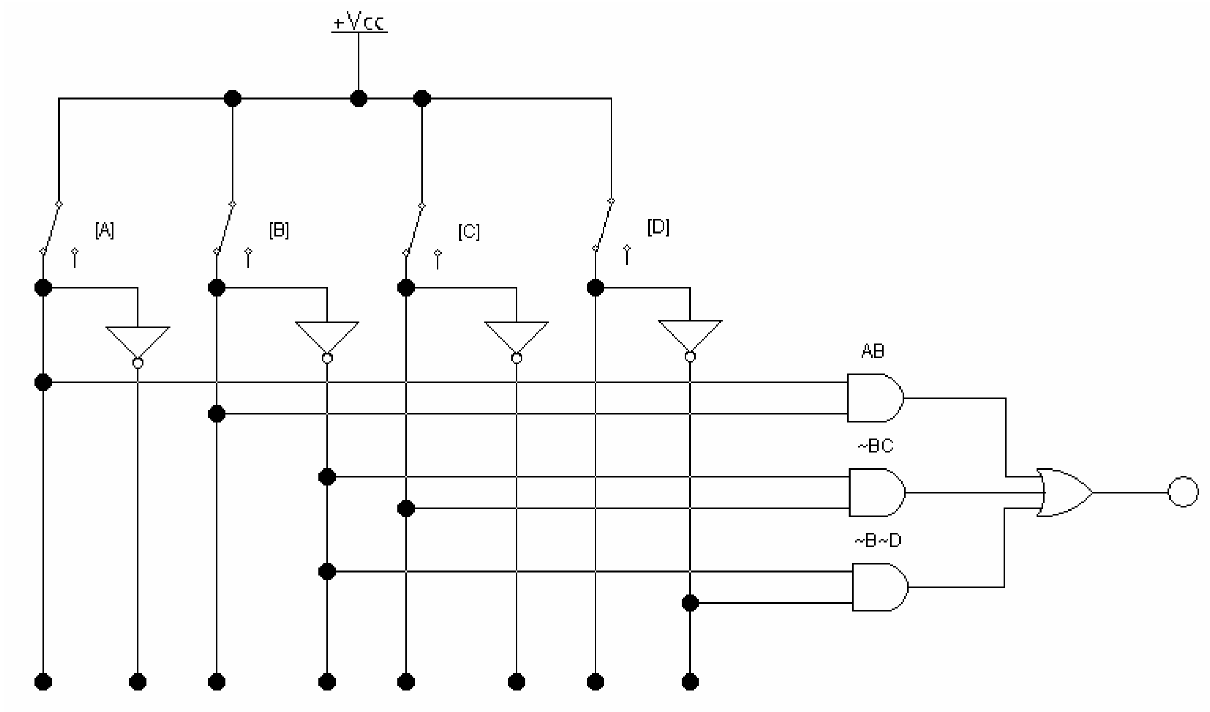


Rysunek 14. Schemat bramek logicznych dla funkcji 1

Rozwiązanie dla jedynek:



Rysunek 15. Siatka Karnaugh'a i wzór funkcji wersja 2



Rysunek 16. Schemat bramek logicznych dla funkcji 2

2.3 ZADANIE 2.

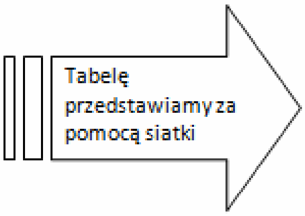
Zaprojektuj układ do głosowania dla 4 osób : A , B, C, D, gdzie D to dziekan. Student zdaje, jeżeli co najmniej jeden z warunków jest spełniony:

- uzyska min. 3 głosy
- uzyska 2 głosy, w tym jeden od dziekana.

Zadany układ zaprojektuj z warunku działania oraz z warunku niedziałania.

Zaczynamy od przedstawienia funkcji w postaci tablicy prawdy, rozpatrujemy każdą możliwą kombinację głosowania członków, funkcja F przyjmuje wartość 1, gdy student zdaje, oraz 0, gdy student oblewa :

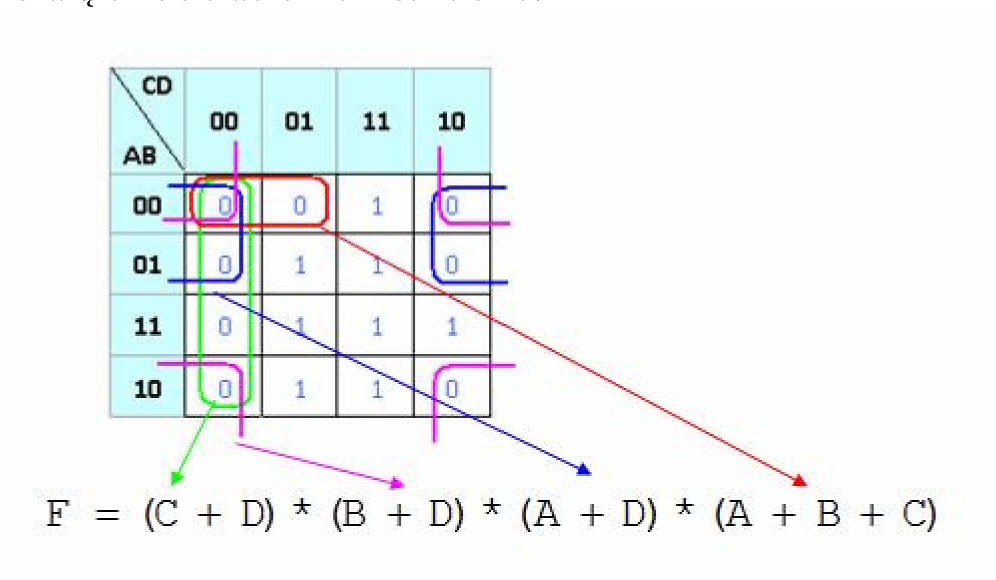
	A	B	C	D	F
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	0
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	1
15	1	1	1	1	1



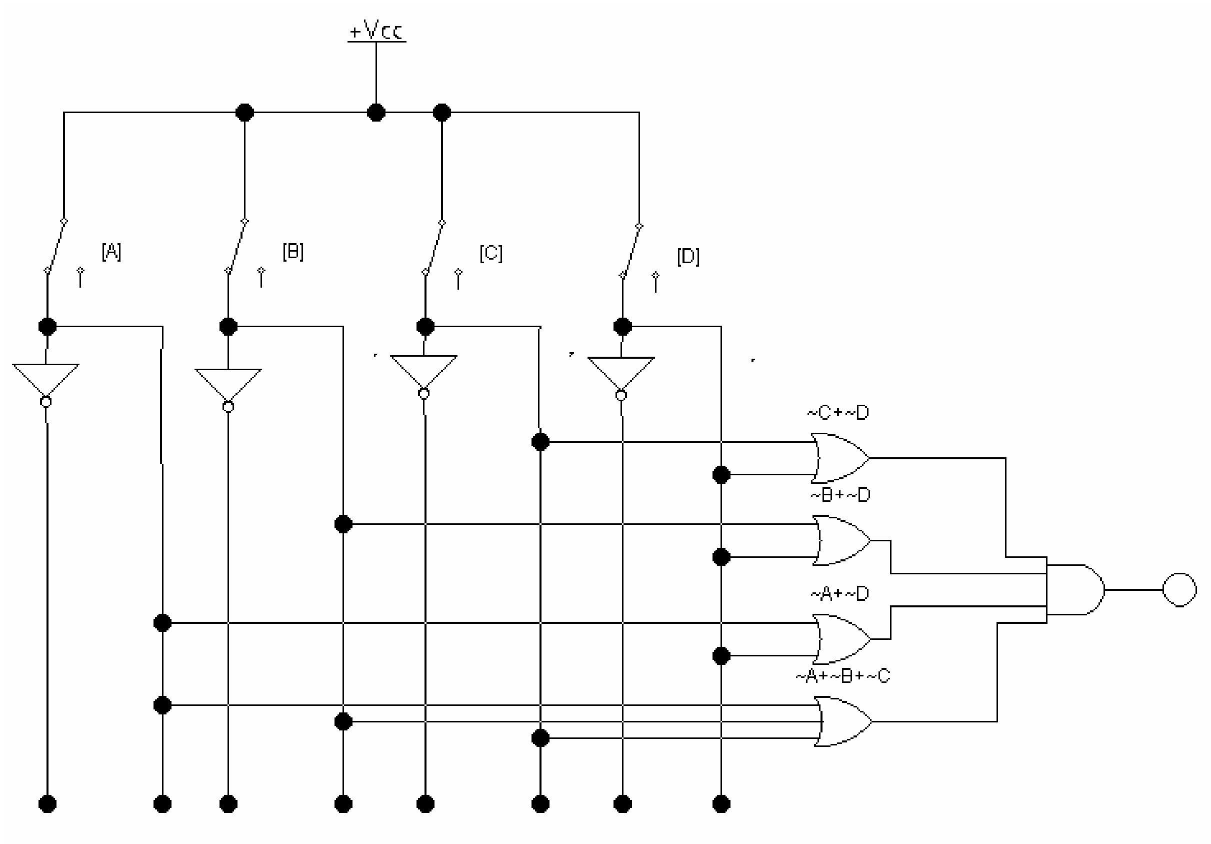
AB \ CD	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	1	1	0
11	0	1	1	1
10	0	1	1	0

Rysunek 17. Wpiwanie funkcji do tablicy

Rozwiązanie dla warunku niedziałania:

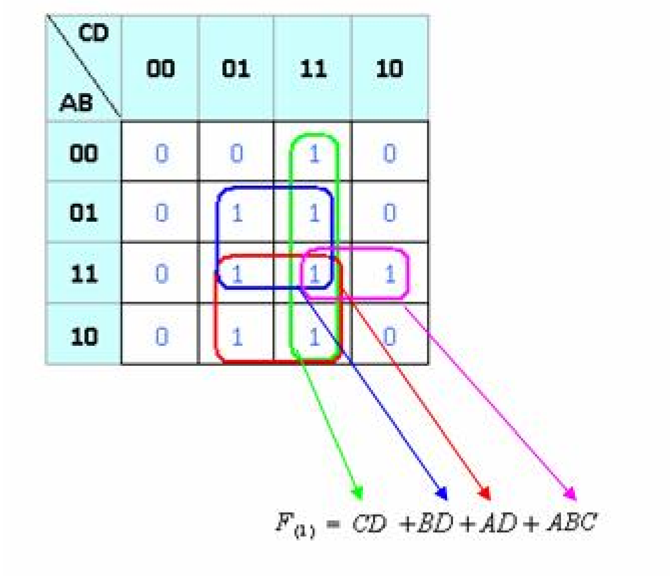


Rysunek 18. Siatka Karnaugh'a i wzór funkcji wersja 1

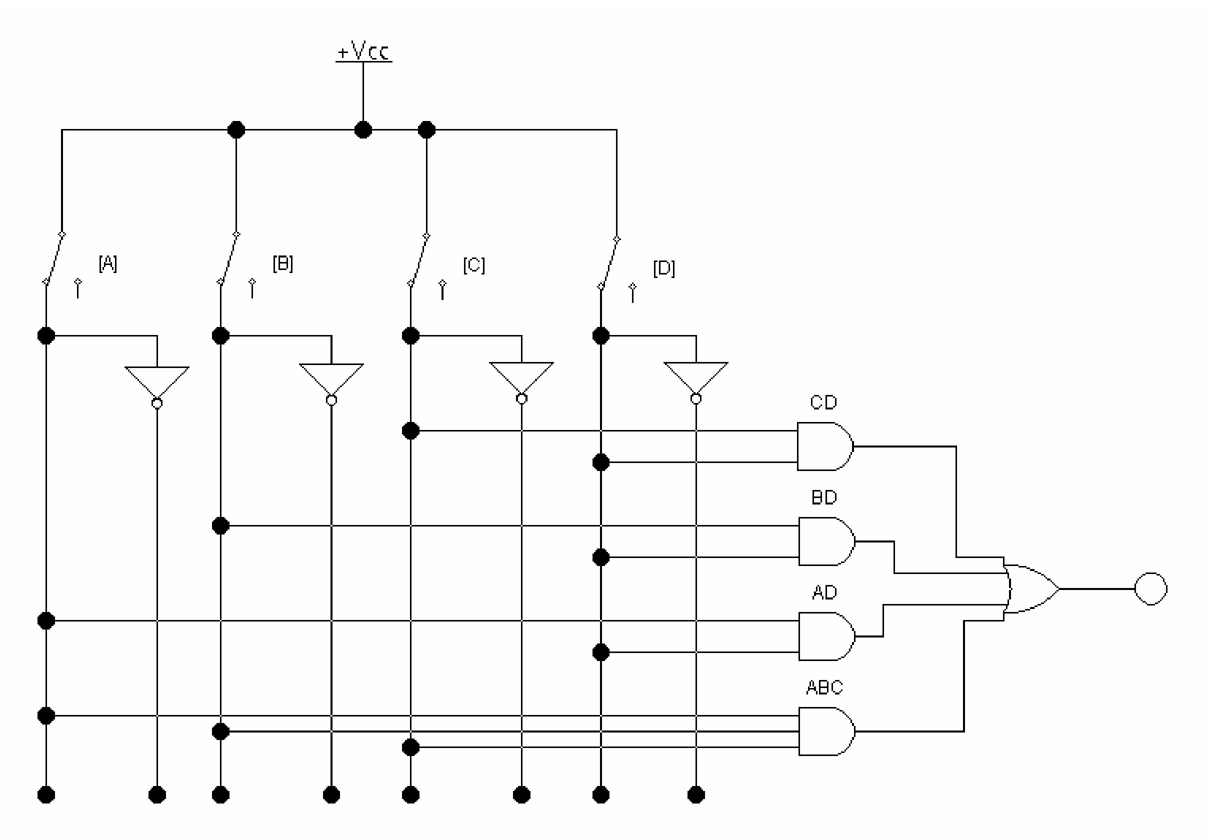


Rysunek 19. Schemat bramek logicznych dla funkcji 1

Rozwiązanie dla warunku działania:



Rysunek 20. Siatka Karnaugh'a i wzór funkcji wersja 2



Rysunek 21. Schemat bramek logicznych dla funkcji 2

2.4 ZADANIE 3.

Z podanej postaci zapisu funkcji stwórz siatkę Karnaugh'a i wyprowadź funkcję wyjściową.

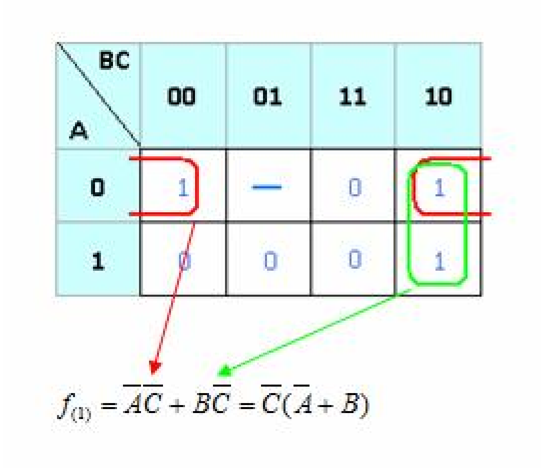
2.4.1 F=Σ (0,2,6) + Ø (1)

Wykorzystujemy siatkę z ponumerowanymi miejscami.

A \ BC	**0 0**	**01**	**11**	**10**
0	0	1	3	2
1	4	5	7	6

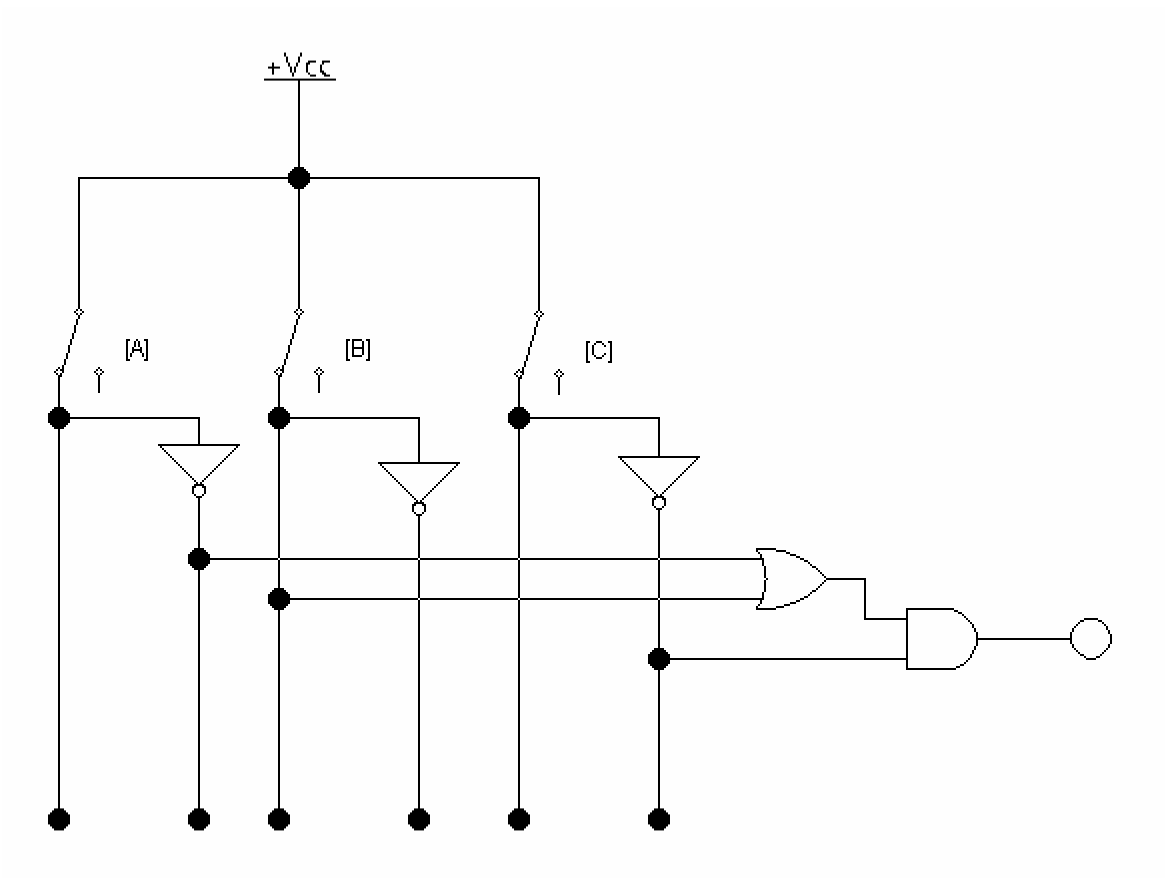
Rysunek 22. Tabela funkcji wyjściowej

Podany zapis oznacza, że miejsca 0, 2 i 6 wypełniamy jedynkami, natomiast w miejscu 1 znajduję się stan nieokreślony. Pozostałe miejsca wypełniamy zerami.



Rysunek 23. Siatka Karnaugh’a i wzór funkcji

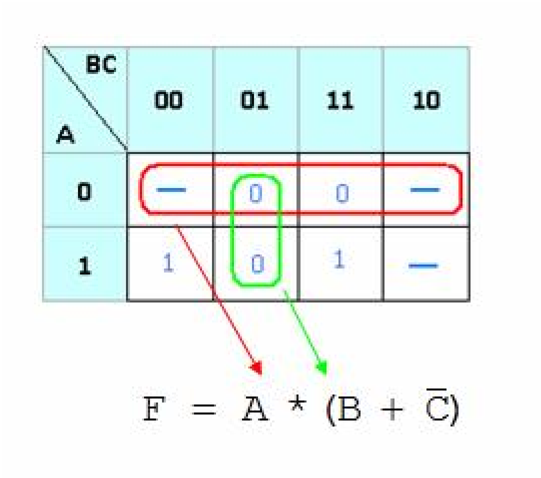
Otrzymaną funkcję mogliśmy jeszcze zminimalizować, co pozwoliło nam zaoszczędzić jedną bramkę logiczną w projektowaniu układu.



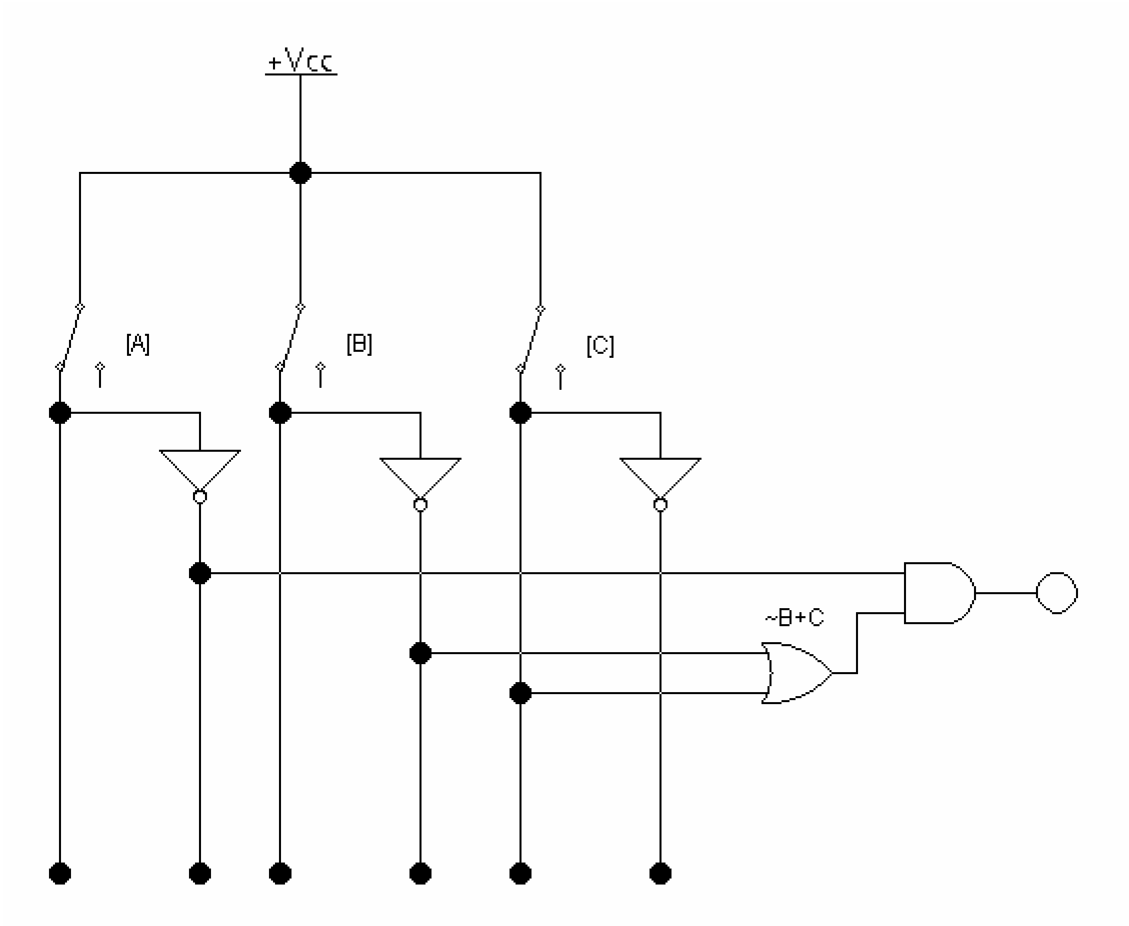
Rysunek 24. Schemat bramek logicznych

2.4.2 F=∏(1,3,5) + Ø (0, 2, 6)

W tym przykładzie postępujemy podobnie, jednak symbol ∏ oznacza miejsca, które wypełniamy zerami.



Rysunek 25. Siatka Karnaugh'a i wzór funkcji



Rysunek 26. Schemat bramek logicznych